Journal of the Acoustical Society of America,1975,58,711-720.
(5)Plomp,R.: Aspects of tone sensation. Academic pres.,1976.
(6)曽根敏夫、城戸健一、二村忠元 ： 音の評価に使われることばの分析、日本音響学会誌、1962、18、320-326.
(7)Osgood,C.E.,Suci,G.J., & Tannenbaum,P.H. : The measurement of meaning, Illinois Press,1957.
(8)北村音壱、難波精一郎、三戸左内、： 再生音の心理的評価について、電気通信専門委員会資料,1962.2.
(この他、音色のSD法による研究は1961年以来ほぼ10年間に亘り、音響学会講演文集に報告されている。)
(9)厨川　守、八尋博司、柏木成豪 ： 音質評価のための7属性、日本音響学会誌、1978a, 34(9),493-500.
(10)厨川　守、八尋博司、柏木成豪 ： 音の7属性の性格について、日本音響学会誌、1978b, 34(9),501-509.

３．２　ＭＤＳ法

心理学、行動科学、社会学などの分野では、心理実験あるいはアンケート調査などでさまざまな種類のデータが収集される。ＭＤＳ法（多次元尺度構成法；multi-dimensional scaling；　略して、ＭＤＳ）とは、これらのデータを分析し、人間の知覚あるいは認識の構造を視覚的に理解しやすくするために、幾何学的モデルで表現する方法である。

はじめてＭＤＳを実用的な形にまとめたのは１９５８年の W.S.Torgersonであったが、その後２０年余りの間に、電子計算機の急速な発展に伴ってＭＤＳの多くの手法が開発されてきた。

ここでは、はじめにＭＤＳの基本的な考え方について簡単に説明し、その後、音色に関する心理実験データの分析など実際の応用例について述べる。

３．２．１　ＭＤＳ概論

ＭＤＳとはどのような手法であるかを説明するのに、次のような例がある。すなわち、図３．６は米国内のいくつかの都市の位置を示す地図である。この地図から、表３．３に示す各都市間の距離関係を表す距離行列を作成することは容易である。ものさしで地図上都市間の間隔を測り、縮尺の逆数を掛ければよい。

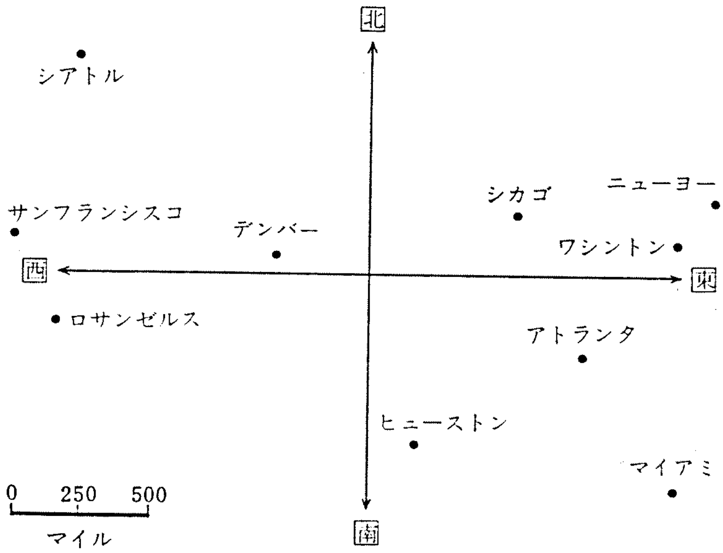

図３．６　米国内の１０都市の位置関係を示す地図

都市	アトランタ	シカゴ	デンバー	ヒューストン	ロサンゼルス	マイアミ	ニューヨーク	サンフランシスコ	シアトル	ワシントン
アトランタ		587	1212	701	1936	604	748	2139	2182	543
シカゴ	587		920	940	1745	1188	713	1858	1737	597
デンバー	1212	920		879	831	1726	1631	949	1021	1494
ヒューストン	701	940	879		1374	968	1420	1645	1891	1220
ロサンゼルス	1936	1745	831	1374		2339	2451	347	959	2300
マイアミ	604	1188	1726	968	2339		1092	2594	2734	923
ニューヨーク	748	713	1631	1420	2451	1092		2571	2408	205
サンフランシスコ	2139	1858	949	1645	347	2594	2571		678	2442
シアトル	2182	1737	1021	1891	959	2734	2408	678		2329
ワシントン	543	597	1494	1220	2300	923	205	2442	2329	

表３．３　米国の１０都市間の直線距離（マイル）

次にこれとは逆の問題を考えてみよう。すなわち各都市間の距離行列が与えられているときに地図を復元する問題である。これは前の問題に比べるとずっと難しい。この後者のような問題を２次元空間だけに限らず、多次元空間について解決していくための手法がＭＤＳである。これらの表現を一般的に言いかえると、ＭＤＳとは、着目している対象（上

の例では都市）の間の何らかの基準による差異度（非類似性と呼ぶ；上の例では距離）が与えられているときに、対象を多次元空間内の点として表し、点間の距離が非類似性と最もよく一致するように点の配置を定める方法である、ということができる。

ＭＤＳとして最初に Torgersonによって発表された方法は、対象間の非類似性が下のような距離の公理系を満たしているものでなくてはならなかった。すなわち、対象iとjの２点間の距離d_{ij}は

$$
\left.
\begin{array}{lll}
(\mathrm{i}) & d_{ij} \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad d_{ii}=0 & \text{（最小性）} \\
(\mathrm{ii}) & d_{ij}=d_{ji} & \text{（対称性）} \\
(\mathrm{iii}) & d_{ij}+d_{jk} \geqq d_{ik} & \text{（三角不等式）}
\end{array}
\right] \cdots (1)
$$

の三つの性質を満たす関数として定義された。そこで Torgersonの方法は、計量的ＭＤＳと呼ばれている。先の地図の例では、各都市間の距離ｄは（１）式の公理系を満足していることは明らかである。したがって、各都市間の距離行列から地図を復元するには計量的ＭＤＳを使うことができる。

しかし、心理学、行動科学などで収集されるデータは、距離の公理系を満たしていないもの、あるいは満たしているかどうか明確でないものが多い。その場合にはこのままで計量的ＭＤＳを使うことには問題がある。

そこで、各対象間の非類似性ｄが（１）式の公理系を満たさない場合にも使える非計量的ＭＤＳが１９６２年にShepardにより提案され、その後１９６４年に Kruskal がこれを発展させ､現在では数ある非計量的ＭＤＳの中では Kruskal のものが最もポピューラーとなっている。非計量的ＭＤＳへの入力データ行列は、単に各対象間の非類似性の大小の順序を示す数字からなるものでよい。以下この稿では、主として、Kruskal の非計量的ＭＤＳについて述べる。

３．２．２　非類似性データの種類

非計量的ＭＤＳでは、それを適用する非類似性データの条件として、前節に示した距離の公理系［（１）式］を満たさなくてもよいので、さまざまのデータを取り扱うことができる。列挙して簡単に説明する。なお非類似性という代りに、二つの対象が似ている度合を表現する言葉として類似性という用語も用いることにする。

（１）類似性の直接判断データ

対象間の類似性を直接判断して求める方法で、対象の中から２個（すべての組合せについて）をとり、その類似性を図３．７のように例えば７段階で評価する。カテゴリーは７である必要はなく、対象の性質により５でも２５でもよいし、また、連続的な尺度の上に鉛筆でチェックをしてもよい。

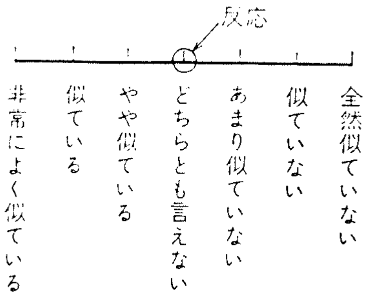

図３．７　対象間の非類似性判断を求める評定尺度の例

（２）対象の混同率

二つの刺激（対象）が似ていれば、それらを取り違える確率（混同率）は多くなり、似ていなければその確率は少なくなると考えられる。例えば外国に行ったとき、日本人は中国人にまちがえられる確率は高いが、スエーデン人にまちがえられる確率は少ない。このような混同率は類似性の指標として用いることが可能である。

（３）対象のパターンの類似性

１組の対象について、種々の性質が測定されている時（例えば１クラスの生徒全体についてそれぞれ身長、体重、胸囲、その他が測定されているとき）、$x_{i\alpha}$を i 番目の対象のα番目の性質に関する標準化された測定値とすると、非類似性を表す指標D_{ij}は

$$D_{ij}=\sqrt{\sum_{\alpha}(X_{i\alpha}-X_{j\alpha})^2} \qquad \cdots (2)$$

として表すことができる。

（４）グループへの分類

多くの評定者が、それぞれ各対象の中から似たものどうしを集め、いくつかのグループを作るやり方である。二つの対象が同じグループに分類される頻度をもって類似性の指標とする。

そのほかにも、非類似性の指標として考えられるデータはいくつかあるが、ここでは省略する。

３．２．３　基本的な考え方

全対象の数が n であるとき、対象 i と j の非類似性δ_{ij}の総数は ${}_nC_2$となる。非計量的ＭＤＳの目標は、D_{ij}の大きさの順序と各対の多次元空間内の距離の順序を可能な限り一致させるように、多次元空間内の対象の配置（以下、布置と呼ぶ）を求めることであ

る。

ここで対象の数が5である場合の例について考えてみよう。このときδ_{ij}の数は${}_5C_2=10$となる。そこで図3．8の横軸に示すように

$$\delta_{13}<\delta_{23}<\delta_{25}<\delta_{45}<\delta_{12}<\delta_{24}<\delta_{34}$$
$$<\delta_{15}<\delta_{35}<\delta_{14} \qquad \cdots (3)$$

なる関係があったとする。

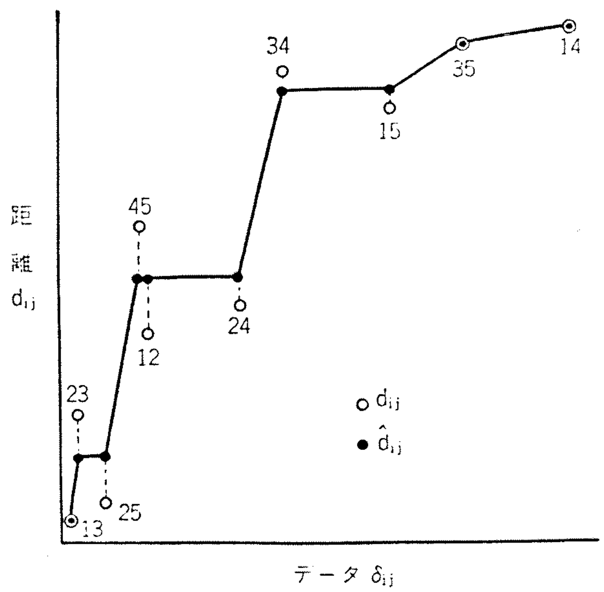

図3．8　ストレスの計算のための不一致度$\hat{d}_{ij}-d_{ij}$の説明

このとき対象の布置から求められる点間の距離d_{ij}の相互関係が

$$d_{13}\leqq d_{23}\leqq d_{25}\leqq d_{45}\leqq d_{12}\leqq d_{24}\leqq d_{34}$$
$$\leqq d_{15}\leqq d_{35}\leqq d_{14} \qquad \cdots (4)$$

となるような対象の布置を求めればよいのである。すなわち非類似性の順序と対象間距離が単調増加の関係になっていればよい。このような単調関係を得るためには布置の次元数を十分大きくとればよいのであるが、次元数が大きくなりすぎると布置の解釈が難しくなり、MDSを施した意味がなくなる。そこで、非類似性の順序と対象間距離の単調増加関係を多少犠牲にしても､次元数を減らしていかなければならない。

そうすると､この単調増加関係からのずれの程度を示す指標が必要になる｡図3．3の○印は五つの対象を布置したときのδ_{ij}とd_{ij}の関係を示すが、この○印の系列は単調増加系列とはなっていない。そこで縦軸に平行に引いた線分が折線と交わる位置に●印をつけてある。この●印の縦軸座標を$\hat{d}_{ij}$と呼んでいる。この$\hat{d}_{ij}$とd_{ij}の差の2乗和をS^*とすると

$$S^{*}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=2\\(i<j)}}^{n}(\hat{d}_{ij}-d_{ij})^{2} \quad \cdots(5)$$

となるが、この2乗和を標準化するために距離の2乗和

$$T^{*}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=2\\(i<j)}}^{n}d_{ij}^{2} \quad \cdots(6)$$

で割りS^{*}/T^{*}を考えれば、これは布置の大きさの影響を受けない。そこでこの平方根

$$S=\sqrt{S^{*}/T^{*}} \quad \cdots(7)$$

を適合度（ストレス）と呼び、非類似性の順序と対象間距離の単調増加関係からのずれを表す指標とする。適合度 S が大きければ、データに対しての布置が悪いことになる。

適合度の評価として、Kruskal は彼の豊富な実験分析データの積み重ねから、経験的に表３．４のような基準を提唱している。しかし、対象の数が多くなればストレスは一般に大きくなるので、表３．４は厳密な基準ではない。

ストレス	適合性の評価	
0.2	あまりよくない	(poor)
0.1	まあまあ適合している	(fair)
0.05	よく適合している	(good)
0.025	非常によく適合している	(excellent)
0	完全に適合している	(perfect)

表３．４　適合性の評価

３．２．４　初期布置と計算手続き

はじめに空間の次元数を定め、各対象の初期布置を設定する。初期布置は、対象の布置に関して何らかの情報がある場合には、その情報を用いて設定するのがよい。しかし、対象の布置に関して何らの情報もないときには、異なった対象に同一の座標を与えなければどのような初期布置を与えてもよい。

初期布置が設定されるとこれに対して点間距離d_{ij}を算出し、折線$\hat{d}_{ij}$のあてはめを行いストレスを計算する。その後は、対象の布置をストレスが減少していく方向に小きざみに動かし、新しい空間布置に対して、ストレスを計算する。この操作を繰り返して、ストレスが極小になったところで計算を終える。

この方法は、ストレスが極小値をとる布置を求めるのであるから、求めた極小値が最小値であるという保証はない。したがって、通常は何種類かの初期布置について最終布置を計算し、最小ストレスをとる布置を解として採用することが望ましい。